Examen partiel du 11 mars 2013

Aucun document n'est autorisé. La durée est de deux heures. Les sept exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : Relations

1. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^3$ (triplets d'entiers positifs) :
   (a) $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z')$ si et seulement si $x = z'$ et $z = x'$
   (b) $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z')$ si et seulement si $\min(x,y,z) = \min(x',y',z')$
   (c) $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z')$ si et seulement si $x = x'$ ou $x = x'-1$ ou $x = x'+1$

   Pour chacune d'entre elles, dire si c'est une relation d'équivalence. Démontrer qu'elle en est une si c'est le cas ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises pour être une relation d'équivalence n'est pas satisfaite.

2. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^3$:
   (a) $(x,y,z) \preceq (x',y',z')$ si et seulement si $x \leq x'$
   (b) $(x,y,z) \preceq (x',y',z')$ si et seulement si $x+y+z \leq x'+y'+z'$
   (c) $(x,y,z) \preceq (x',y',z')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \geq y'$ et $z \leq z'$
   (d) $(x,y,z) \preceq (x',y',z')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y = y'$ et $z = z'$

   Parmi ces relations, lesquelles sont des relations d'ordre ? Une démonstration est attendue pour les relations qui sont bien des relations d'ordre ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises n'est pas vérifiée.

3. *Question bonus :* On rappelle qu'un ordre est dit *total* lorsque deux éléments quelconques sont toujours comparables. Formellement, ceci signifie dans notre cas que

   $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \quad \forall (x',y',z') \in \mathbb{N}^3 \quad (x,y,z) \preceq (x',y',z') \text{ ou } (x',y',z') \preceq (x,y,z)$$

   c'est-à-dire que si l'on prend deux triplets d'entiers positifs, soit l'un est plus petit que l'autre, soit l'inverse. Parmi les relations d'ordre trouvées à la question 2, lesquelles sont totales ? On attend une démonstration ou un contre-exemple selon le cas.

Exercice 2 : Ensembles

On considère deux ensembles X et Y et une application $f : X \to Y$. On définit, pour $A \subseteq X$, l'image directe de A par f comme suit :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$$

$f(A)$ est donc l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont un antécédent par f dans A ; on peut aussi dire que c'est l'ensemble des images par f des éléments de A.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
2. Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ (c'est-à-dire tel que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$). Vous pouvez choisir librement X, Y, A, B et f.
3. *Question bonus :* On suppose que f est injective. Montrer qu'on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 3 : Fonctions

On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (entiers positifs et négatifs). $\mathbb{Z}^2$ est donc l'ensemble des couples d'entiers relatifs.

1. Montrer que :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (5-b, a+3) \end{array} \right.$$
est une bijection.
2. Est-ce que :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b, a-b) \end{array} \right.$$
est une bijection ? une injection ? une surjection ? On attend pour chaque propriété une preuve ou un contre-exemple. Attention : le domaine de départ est l'ensemble des couples d'entiers *positifs*, le domaine d'arrivée celui des couples d'entiers relatifs.
3. Est-ce que :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & a-b \end{array} \right.$$
est une bijection ? une injection ? une surjection ? On attend pour chaque propriété une preuve ou un contre-exemple. Attention au domaine de définition de la fonction !

Exercice 4 : Induction

On définit un langage X par induction à partir de trois règles :

$$a \in X$$

$$\frac{w \in X}{wb \in X}$$

$$\frac{w \in X}{abw \in X}$$

On définit deux fonctions $f : X \to \mathbb{N}$ et $g : X \to \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{cases} f(a) &= 1 \\ f(wb) &= f(w) \\ f(abw) &= f(w)+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(a) &= 0 \\ g(wb) &= g(w)+1 \\ g(abw) &= g(w)+1 \end{cases}$$

1. Montrer par induction que pour tout mot $w \in X$ on a $g(w)+1 \geq f(w)$.
2. Montrer par induction que les mots de X sont compris dans $(ab)^*ab^*$, c'est-à-dire que tout mot de X commence par un certain nombre (éventuellement nul) de répétitions du motif ab, puis qu'il contient un a, puis un certain nombre (éventuellement nul) de b.
3. Montrer que tout mot de $(ab)^*ab^*$ est dans X.

Exercice 5 : Logique propositionnelle

Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est valide, satisfaisable mais pas valide, ou contradictoire. Si la formule est satisfaisable mais pas valide, donner une affectation qui la rend vraie et une qui la rend fausse.

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
4. $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$
5. $((A \vee B) \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \vee (B \vee A))$

Exercice 6 : Logique du premier ordre : variables libres

Pour chacune des formules suivantes, dire quelles sont les variables libres :

1. $\exists x\ \mathcal{R}(x, y, z)$
2. $\forall y\, \exists z\ x + y = z$
3. $(\exists x\ P(x)) \wedge (\forall y\ \mathcal{R}(y, z))$
4. $(\exists x\ P(x)) \vee (\forall y\ \mathcal{R}(y, x))$

Exercice 7 : Logique du premier ordre

On considère une signature comprenant une relation $\mathcal{R}$ d'arité 2, une fonction f d'arité 2 et une constante c. Sur cette signature, on considère trois formules :

1. $\forall x\, \forall y\, \exists z\ \mathcal{R}(f(x, y), z)$
2. $\neg\, (\exists x\, \exists y\ f(x, y) = c)$
3. $\exists x\ \mathcal{R}(x, x)$

On considère deux interprétations :

1. Une interprétation de domaine $\mathbb{N}$, dans laquelle f est interprétée comme suit :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y + 2 \end{array} \right.$$
$\mathcal{R}$ est interprétée comme la relation telle que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 6$, et c est interprétée par l'entier 0.
2. Une interprétation de domaine l'ensemble à trois éléments $\{s, t, u\}$, où c est interprétée par t, où f est interprétée par la fonction telle que :
$$\begin{array}{ccc} f(s, s) = s & f(s, t) = u & f(s, u) = t \\ f(t, s) = u & f(t, t) = t & f(t, u) = s \\ f(u, s) = t & f(u, t) = s & f(u, u) = u \end{array}$$
et où $\mathcal{R}$ est la relation telle que $s\mathcal{R}t$ et $t\mathcal{R}u$ et $u\mathcal{R}s$ (et rien d'autre).

Pour chacune des trois formules, dites si elle est valide dans ces interprétations. Une justification détaillée est attendue.