Examen partiel du 18 mars 2014

Cette consigne doit être lue et comprise avant de commencer l'examen.

Aucun document n'est autorisé. La durée est de deux heures. Les exercices sont indépendants. L'examen est composé de deux parties. La première est sur 12 points ; pour les obtenir, il faut avoir traité correctement les exercices 1 à 3. La seconde partie, sur 8 points, comporte cinq exercices. On pourra avoir une bonne note à cette seconde partie sans avoir fait les cinq exercices, si les réponses aux exercices traités sont exactes et convenablement rédigées.

1 Logique, induction pour les langages (12 points)

Exercice 1 : Langages et induction

On définit sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ un langage X par induction à partir de trois règles :

$$d \in X$$

$$\frac{w \in X}{bw \in X}$$

$$\frac{w \in X}{wac \in X}$$

On définit deux fonctions $f : X \to \mathbb{N}$ et $g : X \to \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{cases} f(d) &= 1 \\ f(bw) &= f(w) + 1 \\ f(wac) &= f(w) + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(d) &= 0 \\ g(bw) &= g(w) + 2 \\ g(wac) &= g(w) + 2 \end{cases}$$

1. Montrer par induction que pour tout mot $w \in X$ on a $g(w) + 1 \geq f(w)$.
2. Montrer par induction que les mots de X sont compris dans $(b)^*d(ac)^*$.
3. Montrer que tout mot de $(b)^*d(ac)^* = \{b^n d(ac)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ est dans X.
4. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 2 : Logique propositionnelle

Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est valide, satisfaisable mais pas valide, ou contradictoire. Si la formule est satisfaisable mais pas valide, donner une affectation qui la rend vraie et une qui la rend fausse.

1. $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
2. $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
3. $((A \Rightarrow B) \vee A) \Rightarrow B$
4. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$
5. $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$
6. $((A \vee B) \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \vee (B \vee A))$

Exercice 3 : Logique du premier ordre

On considère une signature comprenant une relation $\mathcal{R}$ d'arité 2, une fonction f d'arité 2 et une constante c. Sur cette signature, on considère trois formules :

1. $\forall x\, \forall y\, \exists z\ \mathcal{R}(f(x, y), z)$

2. $\neg\,(\exists x\,\exists y\; f(x,y) = c)$
3. $\exists x\; \mathcal{R}(x,x)$

On considère deux interprétations :

1. Une interprétation de domaine $\mathbb{N}$, dans laquelle f est interprétée comme suit :
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y+2 \end{array}\right.$$
$\mathcal{R}$ est interprétée comme la relation telle que $x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x+y = 6$, et c est interprétée par l'entier 1.
2. Une interprétation de domaine l'ensemble à trois éléments $\{s,\, t,\, u\}$, où c est interprétée par t, où f est interprétée par la fonction telle que :
$$\begin{array}{ccc} f(s,s) = s & f(s,t) = u & f(s,u) = t \\ f(t,s) = u & f(t,t) = t & f(t,u) = s \\ f(u,s) = t & f(u,t) = s & f(u,u) = u \end{array}$$
et où $\mathcal{R}$ est la relation telle que $s\mathcal{R}t$ et $t\mathcal{R}u$ et $u\mathcal{R}s$ (et rien d'autre).

Pour chacune des trois formules, dites si elle est valide dans ces interprétations. Une justification est attendue.

2 Relations, récurrence, fonctions (8 points)

Exercice 4 : Ensembles et induction — les scores au rugby

Au rugby, on compte les points de la manière suivante :

- Lorsqu'une équipe obtient une pénalité, elle peut, entre autres, choisir de la tirer au pied. Si le buteur réussit, l'équipe gagne 3 points. Sinon, les scores restent inchangés.
- Lorsqu'une équipe marque un essai, elle gagne 5 points. Le buteur de l'équipe a alors droit à un tir au pied, s'il marque, l'équipe gagne 2 points supplémentaires. On peut donc gagner 5 points sur un essai non transformé, ou 7 points sur un essai transformé.

Les deux équipes commencent avec un score de 0 points.

1. Décrire par induction l'ensemble des scores possibles.
2. Parmi les résultats de match suivants, dire ceux qui sont possibles :
   (a) $62-3$
   (b) $8-4$
   (c) $31-41$
   (d) $2-0$

   Selon le cas, on donnera une dérivation du score de chaque équipe, ou un argument d'impossibilité.
3. Caractériser l'ensemble des résultats de match possibles.

Exercice 5 : Récurrence et fonctions

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si f est surjective, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est surjective.

Exercice 6 : Relations

1. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^3$ (triplets d'entiers positifs) :
   (a) $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z')$ si et seulement si $\max(x,y,z) = \max(x',y',z')$
   (b) $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x',y',z')$ si et seulement si $-2 \leq (x-x') \leq 2$

(c) $(x, y, z)\,\mathcal{R}\,(x', y', z')$ si et seulement si $x + y = z'$ et $x' + y' = z$

Pour chacune d'entre elles, dire si c'est une relation d'équivalence. Démontrer qu'elle en est une si c'est le cas ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises pour être une relation d'équivalence n'est pas satisfaite.

2. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^3$:
   (a) $(x, y, z) \preceq (x', y', z')$ si et seulement si $x = x'$ et $y < y'$ et $z \leq z'$
   (b) $(x, y, z) \preceq (x', y', z')$ si et seulement si $x \leq x'$, $y \geq y'$ et $z = z'$

   Parmi ces relations, lesquelles sont des relations d'ordre ? Une démonstration est attendue pour les relations qui sont bien des relations d'ordre ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises n'est pas vérifiée.

Exercice 7 : Ensembles

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application entre ces ensembles. On définit, pour $A \subseteq X$, l'image directe de A par f comme suit :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$$

$f(A)$ est donc l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont un antécédent par f dans A ; on peut aussi dire que c'est l'ensemble des images par f des éléments de A. On définit le complémentaire de $A \subseteq X$, noté $\overline{A}$, comme suit :

$$\overline{A} = \{ x \in X \mid x \notin A \}$$

Répondre aux questions suivantes (on pourra s'aider de dessins) :

1. Soient $A, B \subseteq X$. Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.
2. Est-ce que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$?
3. Est-ce que $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$?

Exercice 8 : Fonctions

On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs et $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs (entiers positifs et négatifs). $\mathbb{N}^2$ est donc l'ensemble des couples d'entiers positifs, ...

1. Montrer que
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ (a, b) & \mapsto & (5 - b, a + 3) \end{array}$$
est une bijection.
2. Est-ce que :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto & 3a + 5b \end{array}$$
est une bijection ? une injection ? une surjection ? On attend pour chaque propriété une preuve ou un contre-exemple.