Feuille de révisions

Cette feuille est une révision pour le partiel du 18 mars 2014. Il n'y aura pas de correction.En cas de problème avec un exercice, après avoir bien cherché et revu les corrections de TD, vous pouvez me contacter par mail à l'adresse `charles.grellois@pps.univ-paris-diderot.fr` — attention cependant à m'écrire suffisamment avant le partiel, je ne répondrai pas aux messages lundi soir. Si vous avez égaré une feuille de TD, vous pouvez la retrouver sur Didel.

Exercice 1 : Récurrence et fonctions

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si f et g sont surjectives, $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont injectives, $g \circ f$ l'est aussi.
3. Montrer que si f est injective, f^n l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Relations

1. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^2$ (couples d'entiers positifs) :
   (a) $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si et seulement si $y = x'$ et $x = y'$
   (b) $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si et seulement si $x \geq x'$ et $y \leq y'$
   (c) $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si et seulement si $x - y = x' - y'$

   Pour chacune d'entre elles, dire si c'est une relation d'équivalence. Démontrer qu'elle en est une si c'est le cas ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises pour être une relation d'équivalence n'est pas satisfaite.

2. On considère les relations suivantes sur $\mathbb{N}^2$:
   (a) $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $x \geq x'$ et $y' \leq y$
   (b) $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $x - y \leq x' - y'$
   (c) $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $x - y \leq y' - x'$
   (d) $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $x^2 = (x')^2$ et $y' \leq y$

   Parmi ces relations, lesquelles sont des relations d'ordre ? Une démonstration est attendue pour les relations qui sont bien des relations d'ordre ; sinon, montrer qu'une des propriétés requises n'est pas vérifiée.

Exercice 3 : Ensembles

On considère deux ensembles X et Y et une application $f : X \to Y$. On définit, pour $A \subseteq X$, l'image directe de A par f comme suit :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ tel que } \ f(x) = y\}$$

$f(A)$ est donc l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont un antécédent par f dans A ; on peut aussi dire que c'est l'ensemble des images par f des éléments de A.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
2. Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ (c'est-à-dire tel que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$). Vous pouvez choisir librement X, Y, A, B et f.
3. *Question bonus :* On suppose que f est injective. Montrer qu'on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4 : Fonctions

On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs et $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs (entiers positifs et négatifs). $\mathbb{N}^2$ est donc l'ensemble des couples d'entiers positifs, ...

1. Est-ce que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \mapsto & 2a-b \end{array}$$

   est une bijection ? une injection ? une surjection ? On attend pour chaque propriété une preuve ou un contre-exemple.

2. De même pour :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \begin{cases} (0,n) & \text{si } n \geq 0 \\ (-n,0) & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5 : Ensembles et induction

Soit L l'ensemble mots sur $\{0,1\}$ comportant autant de 0 que de 1. Soit M l'ensemble de mots construit de façon inductive de la façon suivante :

base : ϵ

règles :

- $m \in M \Rightarrow 0m1 \in M$
- $m \in M \Rightarrow 1m0 \in M$

1) Un même mot de M peut-il être produit par deux suites d'application de règles différentes ?
2) M et L sont-ils inclus l'un dans l'autre ? égaux ?
3) Trouver une définition inductive de L
4) Trouver une défintion non inductive de M

Exercice 6 : Logique propositionnelle

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides, satisfiables mais pas valides, contradictoires ? Si une formule est satisfiable mais pas valide, donnez un interprétation qui la satisfait et une qui ne la satisfait pas.

1. $p \Rightarrow (p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
4. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg(p \Rightarrow r) \wedge \neg(q \Rightarrow r))$
5. $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$
6. $((p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)) \wedge ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r))$

Exercice 7 : Logique du premier ordre

On considère le langage du premier ordre composé d'un symbole de fonction f d'arité 2, du symbole binaire de l'égalité $=$ (on l'utilisera avec la notation infixe habituelle) et d'un symbole de relation $\mathcal{R}$ d'arité 2. Les variables sont notées $x, y, z \ldots$ Soit l'interprétation suivante :

- le domaine est $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs),
- l'interprétation de f est l'addition sur $\mathbb{Z}$
- l'interprétation de $\mathcal{R}$ est la relation $<$,
- l'interprétation de $=$ est l'égalité sur $\mathbb{Z}$.

On rappelle que la valeur de vérité d'une formule peut dépendre d'une valuation. Quelle est la valeur de vérité de chacune des trois formules ci-dessous dans cette interprétation ?

1. $\forall x \; \exists z \; (f(z,y) \; = \; x)$
2. $\exists x \; (\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y, f(x,x))))$
3. $\forall x (\mathcal{R}(x,y) \Rightarrow \mathcal{R}(f(x,x),y))$