Fiche d'exercices n° 2

Exercice 1 : Montrez que la somme des mesures en radians des angles d'un polygone convexe à n cotés est $(n-2)\pi$.

Exercice 2 : Soient un ensemble E et f une application de E dans E. On définit la fonction f^n par récurrence sur n : $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. On suppose que f est injective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est injective.
2. On suppose que f est surjective. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f^n est surjective.

Exercice 3 : Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$1^3 + \cdots + n^3 \;=\; \frac{n^2(n+1)^2}{4} \;=\; (1+\cdots+n)^2$$

Exercice 4 : Démontrer (par récurrence) qu'un ensemble à n éléments a 2^n parties.

Exercice 5 : Conjecturer puis démontrer le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans lui-même.

Exercice 6 : Montrer que tout nombre entier positif est le produit de (un ou plusieurs) nombres premiers.

Exercice 7 : Expliquer pourquoi le raisonnement suivant est faux :
- Considérons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: "n crayons de couleurs sont tous de la même couleur."
- $P(1)$ est vraie.
- Supposons que $P(n)$ est vraie, et considérons cette fois $n+1$ crayons de couleur. J'en retire un : par hypothèse de récurrence, les n crayons restants sont de la même couleur. Je repose ce crayon et j'en retire un autre, les n nouveaux crayons sont encore de la même couleur.
- Conclusion : Le premier crayon retiré était bien de la même couleur que les autres.

Exercice 8 : Un ensemble d'entiers défini par induction

On considère l'ensemble d'entiers E défini par :
- Base : 0, 1
- Règles : $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 6x-2$

1. Décrire l'ensemble des impairs de E.
2. Est-ce que $2 \in E$? Peut-on dériver -110 ? 89 ? 10 ? -16 ?
3. Etudier l'effet des règles sur la classe modulo 6 des nombres. Traduire ceci en une inclusion de E dans un sous-ensemble strict de $\mathbb{Z}$.
4. Est-ce une égalité ?

Exercice 9 : Deux définitions inductives à analyser

1) On considère la définition de liste suivante.
- base : $a, b, c, ()$
- Règle (binaire) : $u\,,(v) \to (uv)$

Montrer que $((ab)((ac)())d)$ est une liste, trouver sa dérivation. Dessiner l'arbre syntaxique. Est-il unique ?

2) On considère un ensemble E d'entiers défini par
   — Base : 0
   — Règles (unaires) : $x \to x+6$, $x \to x+15$, $x > 5 \to x-15$
   Décrire E.

Exercice 10 : Des définitions inductives à concevoir

Définir par induction :
— l'ensemble des entiers pairs.
— les mots sur $\{a, b\}$ ne comportant pas deux a consécutifs.
— les écritures d'entiers naturels en système décimal
— les mots de longueur paire sur l'alphabet $\{a, b\}$
— les palindromes sur $\{a, b\}$ (laval, rotor,ressasser ....)
— les mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ne comportant pas le facteur 101.
— la "théorie de l'ordre alphabétique" (exemples de théorèmes : arbre<mouche, balle<ballerine)

Exercice 11 :

Soit L l'ensemble mots sur $\{0, 1\}$ comportant autant de 0 que de 1. Soit M l'ensemble de mots construit de façon inductive de la façon suivante :

base : ϵ

règles :
— $m \in M \Rightarrow 0m1 \in M$
— $m \in M \Rightarrow 1m0 \in M$

1) Un même mot de M peut-il être produit par deux suites d'application de règles différentes ?
2) M et L sont-ils inclus l'un dans l'autre ? égaux ?
3) Trouver une définition inductive de L
4) Trouver une défintion non inductive de M

Exercice 12 : Un langage défini par induction

Sur l'alphabet $\{a, b\}$, on construit un langage L comme suit :
— Base : a, b
— Règles : $m \in L \Rightarrow amb \in L$, $m \in L \Rightarrow bma \in L$

1. Est-ce que $abbab$ est dans L ? $baabbabba$? $aabaababab$?
2. Caractériser le langage L.

Exercice 13 : Une ile déserte

On considère deux avions A et B qui effectuent des aller-retours entre la côte et une île déserte initialement. Du fait de contraintes climatiques, A ne peut embarquer que 32 personnes de la côte vers l'île et 27 dans le sens contraire, et B ne peut embarquer que 20 vers l'île et 18 dans le sens contraire. On suppose que les avions ne décollent que si son quota maximum de passagers est atteint.

1) Définissez inductivement l'ensemble N des nombres de personnes que l'ont peut avoir sur l'île après un nombre arbitraire d'allers-retours par les deux avions (A et B ne font pas nécessairement le même nombre d'allers-retours).
2) Démontrer que l'île ne sera plus jamais déserte.

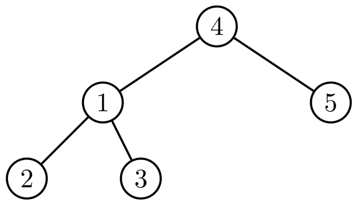
Exercice 14 : Induction

On veut dans cet exercice modéliser des arbres binaires. Un arbre binaire est défini inductivement, c'est :
— soit un arbre vide

— soit un nœud défini par un triplet (n, F_d, F_g), où n est un entier (son étiquette) et F_d et F_g sont deux arbres binaires.

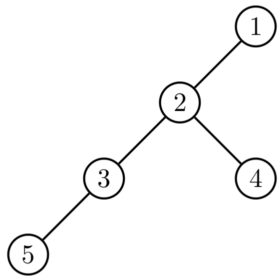
Les sommets de l'arbre dans sa représentation graphique sont ses nœuds ne valant pas *vide*. Les $feuilles$ sont les arbres binaires dont les deux fils F_d et F_g sont des arbres vides. La *racine* de l'arbre correspond au dernier nœud construit dans l'opération inductive.

Par exemple, l'expression $(4,(1,(2, vide, vide),(3, vide, vide)),(5, vide, vide))$ correspond à l'arbre ci-dessous, qui possède 5 nœuds (ou *sommets*) et 3 feuilles. Sa racine est étiquetée par 4, son fils gauche est $(1,(2, vide, vide),(3, vide, vide))$, son fils droit $(5, vide, vide)$.



On peut alors par exemple définir de façon inductive la fonction qui renvoie le nombre de sommets d'un arbre T, noté $|T|$. La fonction vaut 0 si l'arbre est vide et $1 + |F_g| + |F_d|$ sinon.

1. Donner l'écriture parenthésée correspondant à l'arbre de la figure ci-dessous.



2. Définir de façon inductive la fonction qui à un arbre binaire associe la somme de ses étiquettes et la fonction qui renvoie la plus petite étiquette.
3. Définir de façon inductive la fonction donnant le nombre de feuilles d'un arbre.
4. Définir de façon inductive la fonction qui à un arbre binaire associe son nombre d'arêtes (attention : les fils gauche et droit qui sont vides ne comptent pas pour des arêtes – une feuille n'a qu'une arête qui lui est incidente, celle qui lui vient de son père)
5. Montrer que cette fonction est toujours égale à $|T| - 1$.
6. La profondeur de l'arbre est définie comme valant 0 si l'arbre est *vide* et sinon comme le plus grand nombre de sommets sur un chemin séparant la racine et une feuille de l'arbre. Par exemple l'arbre de la première figure a pour profondeur 3, celui de la seconde a pour profondeur 4. Donner une définition inductive de cette fonction profondeur.
7. Montrer par induction que le nombre de sommets est toujours inférieur ou égal à $2^p - 1$ où p est la profondeur de l'arbre.