Feuille de TD n° 7
Automates à pile, premières grammaires

1 Automates à pile

Exercice 1 : Deux modes de reconnaissance

1. *par pile vide* : on considère $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, \emptyset)$ reconnaissant par pile vide. On a $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\perp, A\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$ et δ défini par :
   — $\delta(q_0, a, \perp) \mapsto (q_0, \perp A)$
   — $\delta(q_0, a, A) \mapsto (q_0, AA)$
   — $\delta(q_0, b, A) \mapsto (q_1, \epsilon)$
   — $\delta(q_1, b, A) \mapsto (q_1, \epsilon)$
   Quel est le langage reconnu par cet automate ?
2. *par état final* : on considère $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, \{q_2\})$ reconnaissant par état final. On a $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\perp, A\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et δ défini par :
   — $\delta(q_0, \epsilon, \perp) \mapsto (q_2, \perp)$
   — $\delta(q_0, a, \perp) \mapsto (q_0, \perp A)$
   — $\delta(q_0, a, A) \mapsto (q_0, AA)$
   — $\delta(q_0, b, A) \mapsto (q_1, \epsilon)$
   — $\delta(q_1, b, A) \mapsto (q_1, \epsilon)$
   — $\delta(q_1, \epsilon, \perp) \mapsto (q_2, \perp)$
   Quel est le langage reconnu par cet automate ?

Exercice 2 :

On considère $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, \{q_2\})$ reconnaissant par état final. On a $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\perp, X\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et δ défini par :
— $\delta(q_0, 1, \perp) \mapsto (q_0, \perp X)$
— $\delta(q_0, 1, X) \mapsto (q_0, XX)$
— $\delta(q_0, 0, \perp) \mapsto (q_2, \perp)$
— $\delta(q_0, 0, X) \mapsto (q_1, \epsilon)$
— $\delta(q_1, 0, \perp) \mapsto (q_2, \perp)$
— $\delta(q_1, 0, X) \mapsto (q_1, \epsilon)$
— $\delta(q_2, 0, \perp) \mapsto (q_2, \perp)$
Quel est le langage reconnu par cet automate ? Et si la reconnaissance se faisait par pile vide ? Donner un automate à pile reconnaissant par état final équivalent à cet automate lorsque la reconnaissance se fait par pile vide.

Exercice 3 :

On considère $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, \{q_4\})$ reconnaissant par état final. On a $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\perp, A, B\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ et δ défini par :
— $\delta(q_0, a, \perp) \mapsto (q_1, \perp AA)$
— $\delta(q_0, b, \perp) \mapsto (q_2, \perp B)$
— $\delta(q_0, \epsilon, \perp) \mapsto (q_4, \epsilon)$
— $\delta(q_1, a, A) \mapsto (q_1, AAA)$
— $\delta(q_1, b, A) \mapsto (q_1, \epsilon)$
— $\delta(q_1, \epsilon, \perp) \mapsto (q_0, \perp)$
— $\delta(q_2, a, B) \mapsto (q_3, \epsilon)$
— $\delta(q_2, b, B) \mapsto (q_2, BB)$
— $\delta(q_3, \epsilon, B) \mapsto (q_1, \epsilon)$
— $\delta(q_3, \epsilon, \perp) \mapsto (q_1, \perp A)$

1. Vérifier que *abb* et *bab* sont reconnus par $\mathcal{A}$.

2. Décrire le contenu de la pile après la lecture de b^7a^4.
3. Quel est le langage reconnu par cet automate à pile ?

Exercice 4 :
Sur $\Sigma = \{a, b\}$, construire un automate à pile reconnaissant $\{w \in \Sigma^* \big| |w|_a = |w|_b\}$.

Exercice 5 :
Etant donné un alphabet fini Σ, on considère le langage $L = \{w\tilde{w} | w \in A^*\}$. Donner un automate à pile reconnaissant ce langage (on pourra le prendre non-déterministe et reconnaissant par pile vide).

Exercice 6 : Automates à écriture contrainte
Montrer que tout automate à pile est équivalent à un automate à pile écrivant au plus deux lettres d'un coup sur la pile.

Exercice 7 : Intersection d'automates à pile

1. On considère les langages $\{a^n b^m c^m | (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ et $\{a^n b^n c^m | (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer qu'ils sont reconnus par des automates à pile (que l'on donnera).
2. Calculer l'intersection de ces deux langages. Est-elle reconnaissable par un automate à pile ? On pourra utiliser le lemme de pompage que l'on rappelle ici :

   Lemme de pompage pour les langages algébriques : Soit L un langage algébrique (c'est-à-dire reconnu par un automate à pile). Il existe un entier N tel que tout mot w de L de longueur $|w| \geq N$ possède une factorisation $w = xuyvz$ telle que $0 < |uv|, |uyv| \leq N$ et $xu^n yv^n z \in L$ pour tout entier $n \geq 0$.

2 Grammaires

Exercice 8 :
On considère sur l'alphabet $\{0, 1\}$ la grammaire G d'unique non-terminal S (qui est donc aussi son axiome), de règle de production :

$$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \epsilon$$

1. Quel est le langage engendré par G ?
2. Donner un automate à pile reconnaissant ce langage.

Exercice 9 :
Donner une grammaire algébrique sur $\{0, 1\}$ dont le langage est l'ensemble des mots ayant autant de 0 que de 1.

Exercice 10 :
Donner une grammaire décrivant les entiers divisibles par 3, puis esquisser une telle grammaire pour les entiers divisibles par 9.